**Barem de corectare a soluţiilor la clasa a XII-a**

**1.** a) Fie $G = \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$. Este grupul $(\mathbb{Q}, +)$ izomorf cu $(G, \cdot)$?
b) Sunt izomorfe grupurile multiplicative $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$?

| | |
|---|---|
| start | 1p |
| a) Cele două grupuri nu sunt izomorfe. | |
| În grupul $(\mathbb{Q}, +)$, pentru orice $\in \mathbb{Q}$, ecuaţia $x + x = a$are o soluţie: $x = \frac{a}{2}$ | 2p |
| În grupul $(G, \cdot)$ ecuaţia corespunzătoare | |
| $x \cdot x = a$ nu are soluţie pentru orice $a \in G$. | |
| Dacă $a = 2$ ecuaţia $x^2 = 2$ nu are soluţii în $G$. | 2p |
| b) Ecuaţia $x^3 = 1$ are o soluţie în $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ | |
| şi trei soluţii în $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. | |
| Prin urmare cele două grupuri nu sunt izomorfe. | 5p |
| **total** | **10p** |

**2.** Fie $(G, \cdot)$ un grup şi aplicaţia $f : G \longrightarrow G$ definită prin $f(x) = x^3$, $(\forall)x \in G$. Demonstraţi că
a) dacă $f$ este morfism injectiv, atunci $G$ este abelian.
b) dacă $f$ este morfism surjectiv, atunci $G$ este abelian.

| | |
|---|---|
| start | 1p |
| a) Fie $a, b \in G$. Atunci $a^3b^3 = (ab)^3$ | |
| rezultă $a^2b^2 = (ba)^2$ rezultă $a^4b^4 = (a^2)^2(b^2)^2 = (b^2a^2)^2 = (ab)^4$. | |
| Rezultă $a^3b^3 = (ba)^3$, de unde $(ab)^3 = (ba)^3$ | 3p |
| Din injectivitate rezultă $ab = ba$ | 2p |
| b) $a^3b^3 = (ba)^3 = (ba)^2(ba) = a^2b^2(ba)$ | 2p |
| Rezultă $ab^3 = b^3$. $f$ fiind injectivă, | |
| $b^3$ ia orice valoare din $G$, deci $G$ este abelian | 2p |
| **total** | **10p** |

**3.** Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea:

$$f(x) \geq \frac{1}{x} \quad , (\forall)x > 0.$$

Demonstraţi că $f$ nu admite primitive.

| | |
|---|---|
| start | 1p |
| Presupunem prin absurd că $f$ admite primitive; fie $F$ o primitivă a lui $f$ | 1p |
| Avem: $f(x) \geq \frac{1}{x}, (\forall)x > 0$ atunci | |
| $f\left(\frac{1}{x}\right) \geq x, (\forall)x > 0$ rezultă $-\frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) \leq -\frac{1}{x}, (\forall)x > 0$ | |
| rezultă $\left(F\left(\frac{1}{x}\right) + ln(x)\right)' \leq 0$ | 4p |
| Considerăm funcţia $\phi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = F(\frac{1}{x}) + ln(x)$, | |
| avem că $\phi$ este descrescătoare. | 3p |
| Obţinem $\phi(1) = F(1) \geq \lim\limits_{x \to \infty} \phi(x) = F(0) + \lim\limits_{x \to \infty} ln(x) = \infty$. Absurd | 1p |
| **total** | **10p** |

**4.** Fie $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietăţile:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0 \quad \text{şi} \quad \int_0^1 xf(x)\,dx = 0\,.$$

Demonstraţi că există $a, b \in [0,1], a \neq b$, astfel încât $f(a) = f(b) = 0$.

| | |
|---|---|
| start | 1p |
| Din faptul că $f$ este continuă şi $\int_0^1 f(x)dx = 0$ rezultă că există $a \in (0,1)$ astfel încât $f(a) = 0$. | 5p |
| Presupunem că $a$ este singrulul punct în care $f$ se anulează. Atunci funcţia $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x-a)f(x)$ este continuă şi păstrează semn constant pe $[0,1]$. Avem: $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 [xf(x) - af(x)]dx = 0$ | 3p |
| Absurd, deoarece $g$ păstrează semn constant pe $[0,1]$. | 1p |
| **total** | **10p** |